Principios Básicos de Cosmología

Suposiciones Cosmológicas

1. **El Universo es homogéneo – todo observador ve lo mismo**
2. **El Universo es isotópico – no hay dirección privilegiada en el Universo**

Estas suposiciones implican que el Universo debe ser estático, o que tenga sólo movimientos radiales. Por ejemplo, si el Universo rotara, entonces habría un eje de rotación preferido lo que violaría la suposición de isotropía.

Supongamos un Universo dinámico, y definamos

$\vec{u}$ = coordenadas co-móviles de un objeto.

$R(t)$ = movimiento (expasión o contracción) del Universo

l = distancia medida al objeto

La velocidad observada de una galaxia será:

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}(Ru) = \dot{R}u$$

R y u no son observables, pero l si lo es, entonces,

$$v = \dot{R}\left(\frac{l}{R}\right) = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)l$$

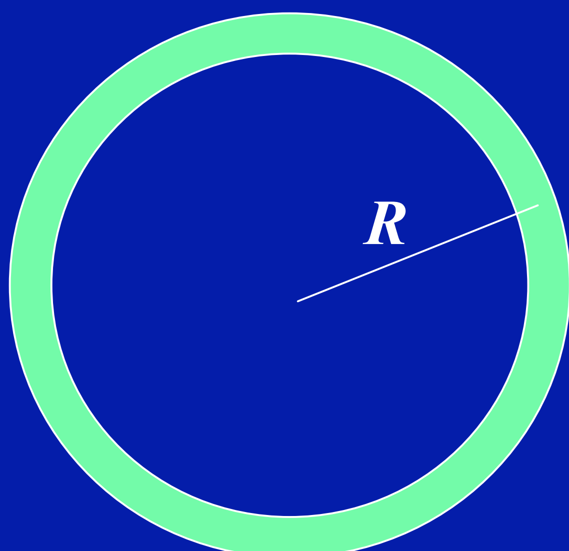
Def. $\Rightarrow$

$H(t) \equiv \frac{\dot{R}}{R}$ parámetro de Hubble

$H_o = \frac{\dot{R}_o}{R_o}$ constante de Hubble hoy

Universo Newtoniano

- **Consideremos un Universo Newtoniano, donde las leyes de Newton valen.**
- **Elijamos un centro y estudiemos el movimiento de una cáscara de material a distancia *R* del centro.**



Recordemos que si el universo es homogéneo e isotrópico, la materia fuera de la cáscara no tendrá ningún efecto en su movimiento; la dinámica de la cáscara sólo depende del material al interior a ella

La desaceleración de la cáscara será,

$$a = \ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}$$

y si multiplicamos cada lado por $\dot{R}$, e integramos

$$\int \dot{R}\ddot{R}dt = -\int \frac{GM}{R^2}\dot{R}dt$$

como $\ddot{R} = \frac{d\dot{R}}{dt}$ y $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$, la integral es sencilla

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = E,$$ donde E es la energía total

Si $E_{pot} > E_{cin.} \Rightarrow E < 0$, colapso

Si $E_{pot} > E_{cin.} \Rightarrow E > 0$, expansión

Parámetro de desaceleración, *q(t)*

Multipliquemos la ecuación de energía por 2 y dividamos por R^2.

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{2GM}{R^3} = \frac{2E}{R^2}$$

o, ya que $\ddot{R} = -GM/R^2$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{2\ddot{R}}{R} = \frac{2E}{R^2}$$

si multiplicamos y dividimos el segundo término por $R/\dot{R}$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{2\ddot{R}}{R}\left(\frac{R}{\dot{R}}\right)^2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2E}{R^2}$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}\right)\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2E}{R^2}$$

Definimos el parámetro de desaceleración

$$\boxed{q(t) \equiv -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}}$$

Si q<1/2, E>0, Universo desligado
Si q>1/2, E<0, Universo ligado
Si q=1/2, E=0, Universo crítico

la ecuación queda

$$H^2 - 2H^2 q = \frac{2E}{R^2} \quad \text{o,} \quad (1-2q) = \frac{2E}{H^2 R^2}$$

Parámetro de densidad, Ω(t)

Dada la aceleración,

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}$$

sustituyendo la masa por la densidad,

$$\rho(t) = \frac{M}{4/3\pi R^3}$$

Entonces,

$$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{GM}{R^2}\frac{R}{\dot{R}^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\left(\frac{R}{\dot{R}}\right)^2$$

implica, $\rho = \dfrac{3}{4\pi G}H^2 q$

Para un Universo crítico, E = 0, q = 1/2

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G}H^2$$

sea $h \equiv H_o/100$, entonces para hoy,

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G}H_o^{\ 2} = 1.9\times 10^{-29}\, h^2 g\, cm^{-3}$$

Definimos, $\boxed{\Omega(t) \equiv \dfrac{\rho}{\rho_c}}$

Ω > 1, Universo cerrado

W< 1, Universo abierto

W=2q

La edad del Universo

¿Cuál es la edad del Universo en función de H_0 y q_0? Partamos con la Ecuación de energía

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = E$$

multipliquemos por $2/R^2$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{2GM}{R^3} = \frac{2E}{R^2}$$

la masa del Universo, $M = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0$

entonces, $$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \frac{2E}{R^2}$$

Consideremos un Universo vacio (Milne), $\rho_0 = 0$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2E}{R^2} \qquad \text{o} \qquad \dot{R} = \sqrt{2E}$$

Esto se integra fácilmente,

$$R(t) = \sqrt{2E}\,t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{R}{\sqrt{2E}}$$

Reemplacemos $\dot{R} = \sqrt{2E}$

$$t = \frac{R}{\dot{R}} = \frac{1}{H} \qquad \Rightarrow \qquad t_0 = \frac{1}{H_0} \text{ hoy}$$

Consideremos un Universo Einstein-de Sitter, E=0 (crítico).

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = 0$$

multipliquemos por R^2

$$\dot{R}^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\frac{R_0^3}{R} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \dot{R} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_0\frac{R_0^3}{R}}$$

la solución a esta ecuación diferencial es de la forma,

$$R = at^{2/3} \qquad \text{donde} \qquad a = \sqrt[3]{6\pi G\rho_0 R_0^3}$$

Usando $R = at^{2/3}$ y $\dot{R} = \left(2/3\right)at^{-1/3}$

obtenemos la edad en función de observables,

$$t = \left(2/3\right)\frac{R}{\dot{R}} = \left(2/3\right)\frac{1}{H}$$

ó $t_0 = \left(2/3\right)\frac{1}{H_0}$ en el presente

Redshift Cosmológico

¿Qué efecto tiene la expansión en la luz?

Consideremos una partícula que viaja con velocidad ***v*** y que se cruza con un observador en el punto 1, en su camino a otro observador en el punto 2. Al momento en que llega a 2, el Universo se ha expandido; específicamente, si la partícula ha viajado ***v(t)dt***, la velocidad de expansión del universo es ***H(t)v(t)dt***. La velocidad de la partícula que mide el observador en 2 es,

$$v(t+dt) = v(t) - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right) v(t)dt$$

arreglando,

$$\frac{v(t+dt) - v(t)}{v(t)} = -\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) dt$$

ó

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dR}{R}$$

integrando, $\quad v(t) \propto \frac{1}{R}$

Si usamos los mismos argumentos para la frecuencia de un photon

$$\nu(t) = R^{-1}$$

Si definimos redshift como,

$$(1+z) = \frac{\nu_{em}}{\nu_{obs}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}}$$

entonces,

$$(1+z) = \frac{R_0}{R(t)}$$