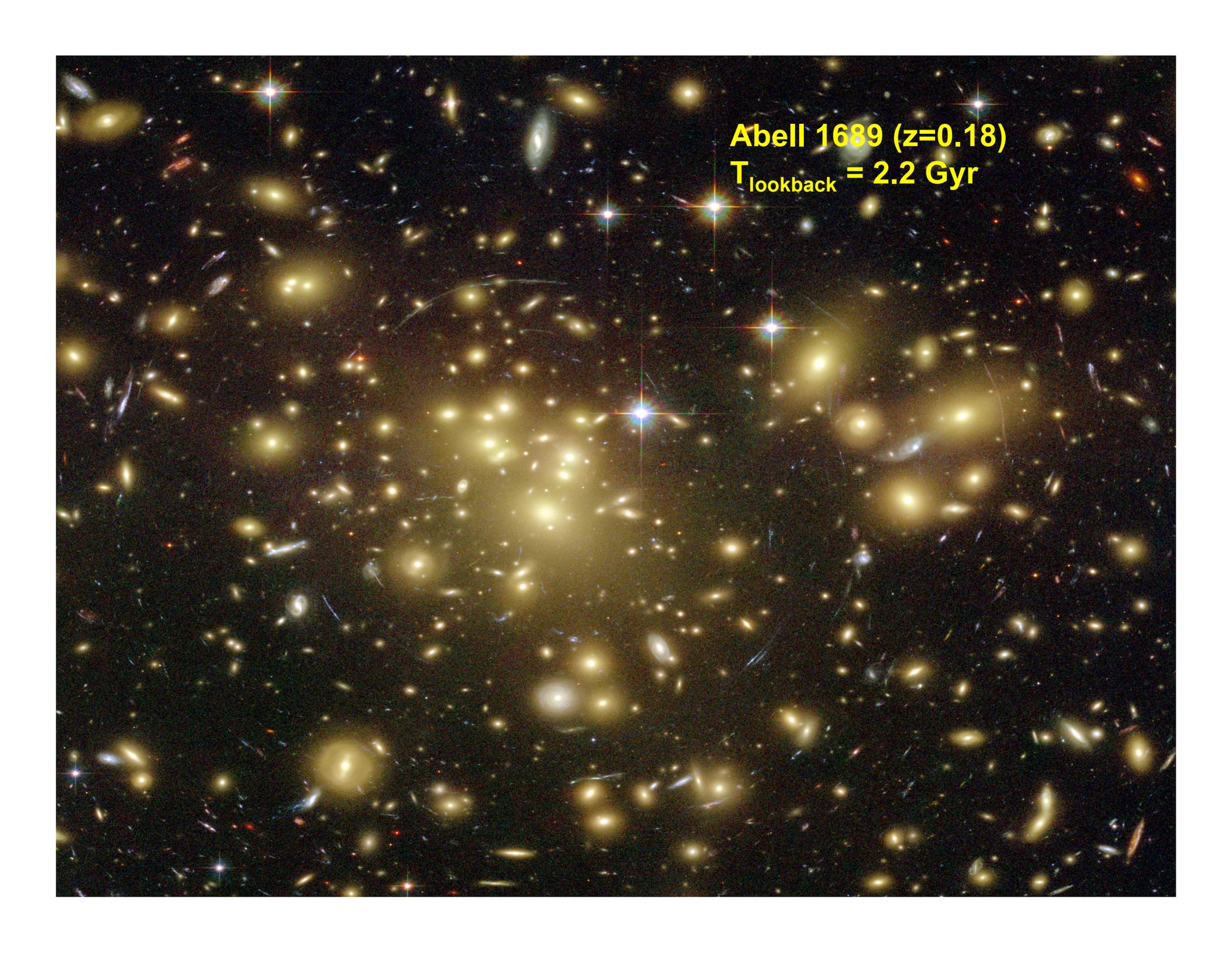


# Lentes Gravitacionales

- Teoría
- Magnificación para un Lente de Schwarzschild (fuente puntual)
- Escalas Generales para Lentes
- Retardo Temporal por Lentes
- Lentes Reales
- Aplicación microlentes estadísticos



**Abell 1689 ( $z=0.18$ )**

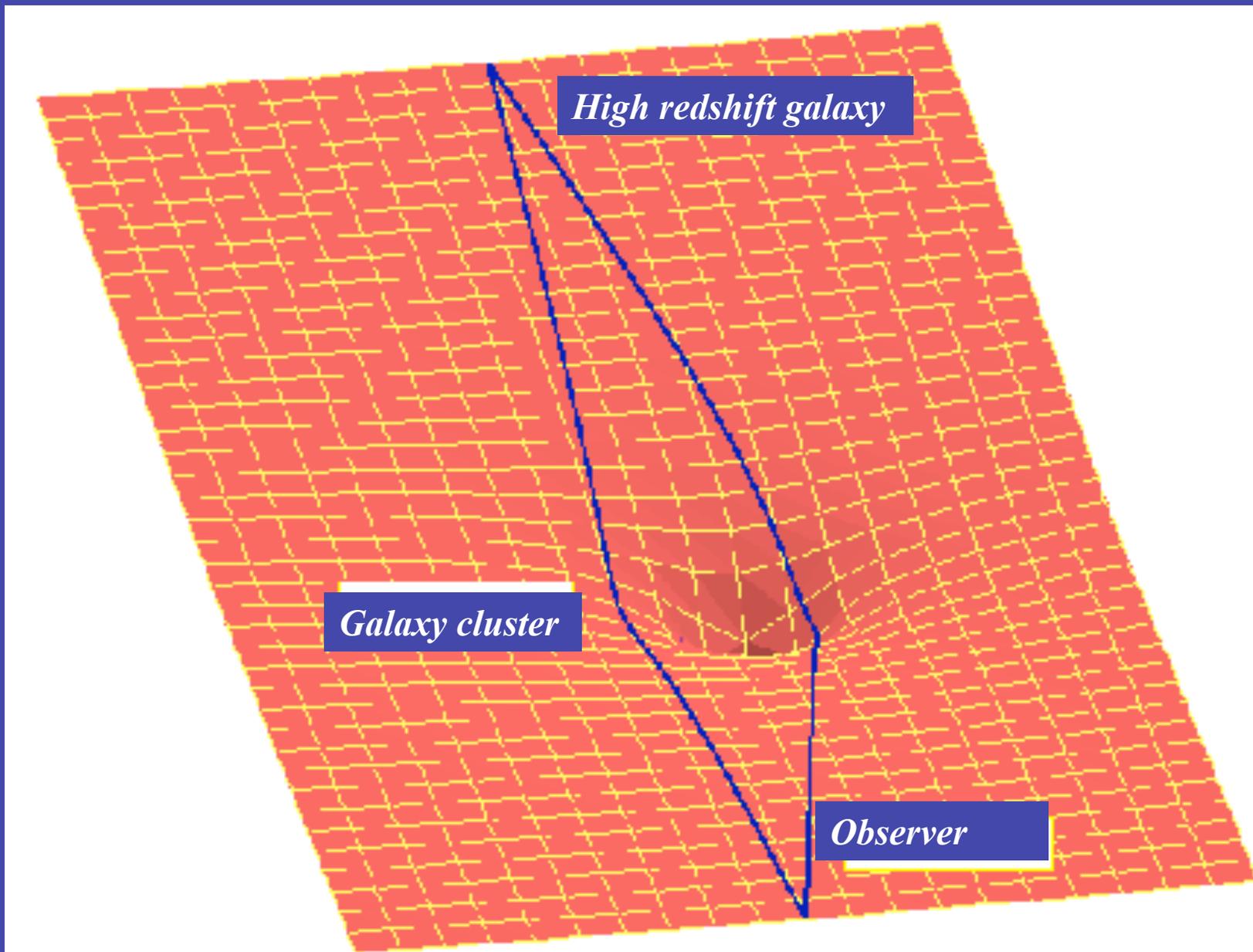
**$T_{\text{lookback}} = 2.2 \text{ Gyr}$**



**Galaxy Cluster Abell 1689 Details**  
**Hubble Space Telescope • Advanced Camera for Surveys**

NASA, N. Benitez (JHU), T. Broadhurst (The Hebrew University), H. Ford (JHU), M. Clampin (STScI), G. Hartig (STScI), G. Illingworth (UCO/Lick Observatory), the ACS Science Team and ESA • STScI-PRC03-01b

## Gravitational lensing and Einstein's General Relativity Theory



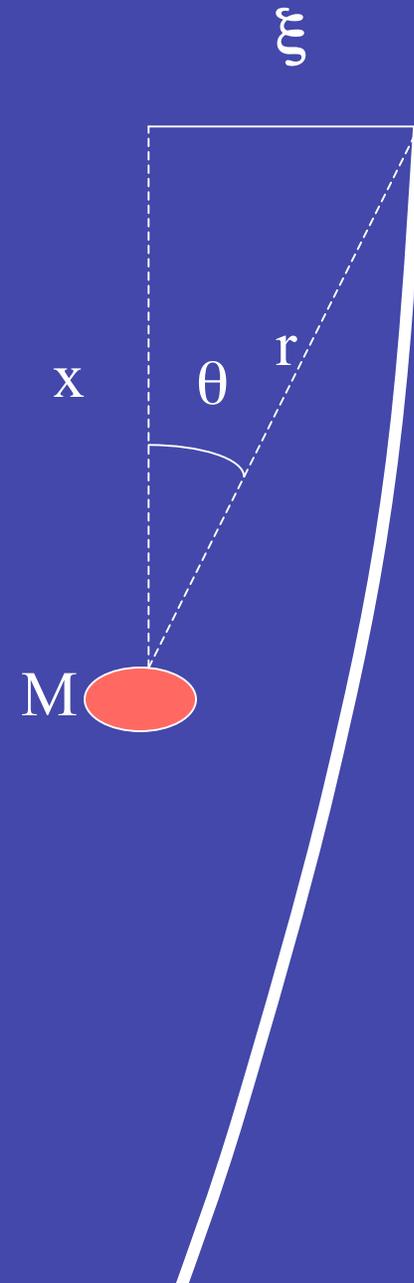
# Algunas aplicaciones

1. **Magnificación depende de la masa del lente  $\Rightarrow$  experimentos de microlentes (*e.g.* MACHO), monitoreo de millones de estrellas, se puede estudiar las propiedades de estrellas del halo; de otra forma son demasiado débil para verlas.**
2. **Dado la magnificación, los lentes gravitacionales pueden ser usados para observar galaxias a alto redshift, las que normalmente no podrían ser vistas.**
3. **El retardo de tiempo de lentes gravitacionales puede ser usado para medir la constante de Hubble.**

# Teoría

Consideremos un fotón que pasa cerca de la masa  $M$ , con un “parámetro de impacto” inicial,  $\xi$ . Bajo la teoría de Newton, el fotón experimentará una aceleración perpendicular a la dirección de movimiento. Para calcular la cantidad desviada integramos a lo largo de la trayectoria.

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{GM}{r^2} \sin \theta$$



Si reemplazamos  $dx = c dt$ , tenemos

$$\begin{aligned}v_{\perp} &= \frac{GM}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \xi^2} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{x^2 + \xi^2}} dx \\&= \frac{GM\xi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + \xi^2)^{-\frac{3}{2}} dx \\&= \frac{GM\xi}{c} \cdot \frac{2}{\xi^2} \\v_{\perp} &= \frac{2GM}{\xi c}\end{aligned}$$

el ángulo de desviación Newtoniano, en la aproximación de ángulos chicos

$$\alpha = \frac{v_{\perp}}{c} = \frac{2GM}{\xi c^2}$$

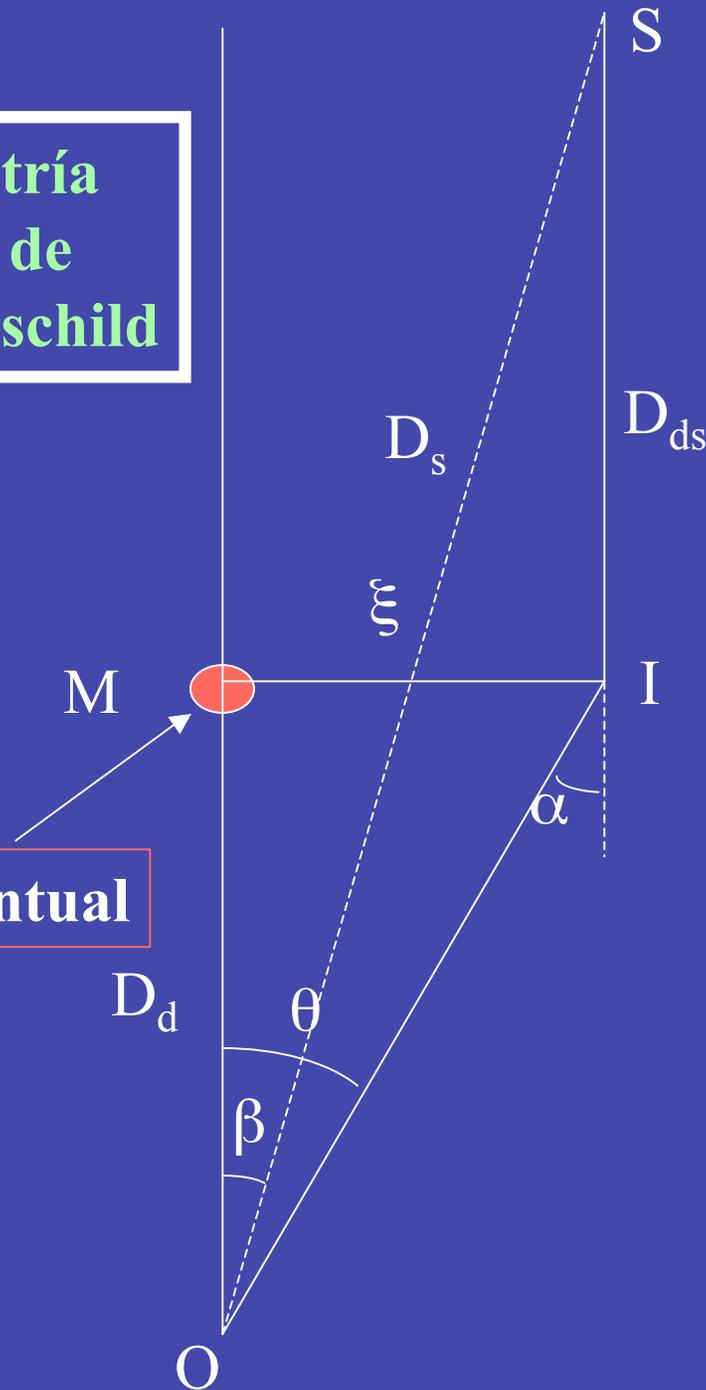
En el caso relativista, la gravedad afecta tanto la componente espacial como la temporal en el camino del fotón, de tal forma que el ángulo de desvío es el doble que en el caso clásico. Definimos el ángulo de desviación, o ángulo de Einstein, como

$$\alpha = \frac{4GM}{\xi c^2}$$

Para comprender la geometría de lentes gravitacionales, definamos algunos términos

# Geometría Lente de Schwarzschild

Lente puntual



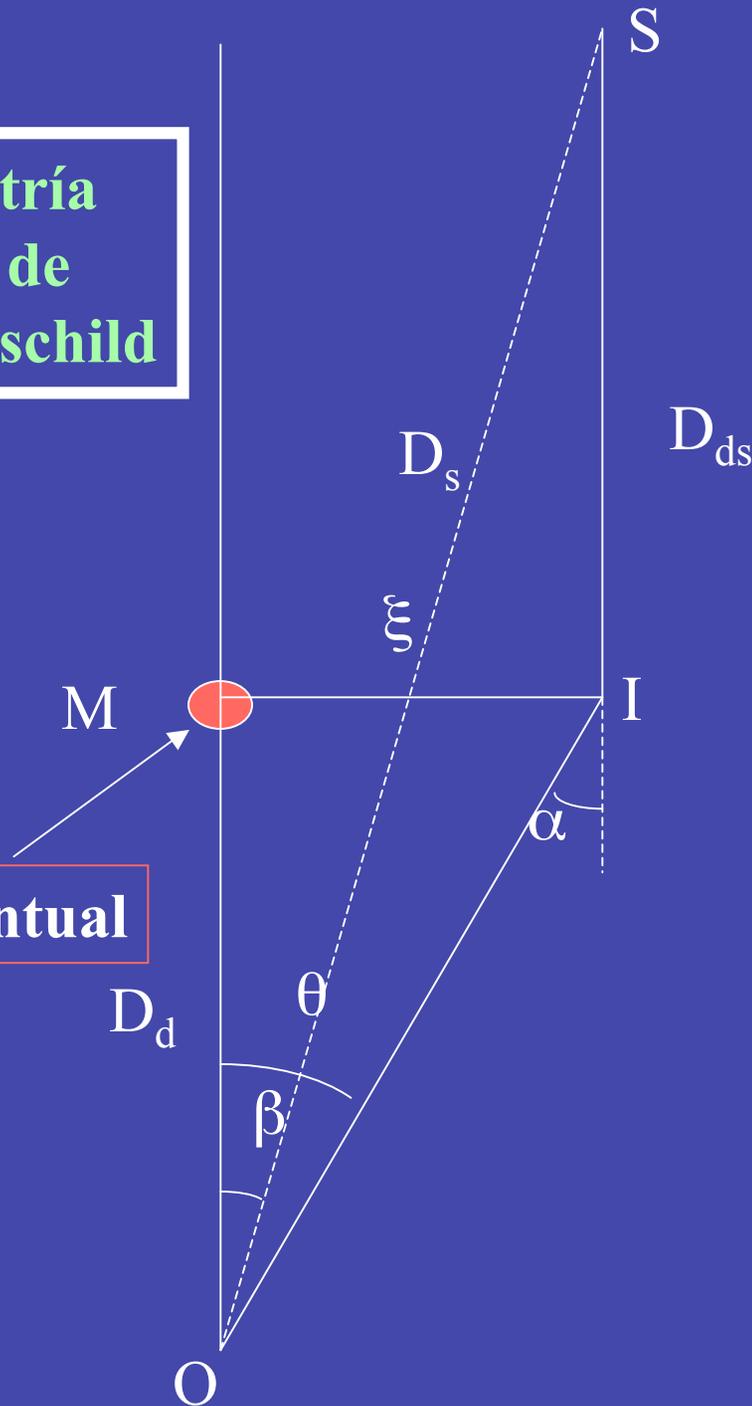
$D_d$	Distancia entre el observador y el lente
$D_s$	Distancia entre el observador y la fuente
$D_{ds}$	Distancia entre el lente y la fuente
$\vec{\beta}$	Angulo real entre el lente y la fuente
$\vec{\theta}$	Angulo observado entre el lente y la fuente
$\vec{s}$	Distancia desde el lente al paso del rayo de luz
$\vec{\alpha}$	Angulo de desviación de Einstein

Notar que  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ , y  $\xi$  son vectores, y los cálculos a veces son números negativos y positivos. Para el cálculo de una fuente puntual no es necesario usar cantidades vectoriales, pero en el caso donde la fuente es complicada, *i.e.* cúmulos, los ángulos de desviación hay que sumarlos vectorialmente.

En la práctica  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\theta$  son ángulos pequeños, de tal forma que podemos usar aproximaciones para ángulos pequeños. También  $D_\phi$ ,  $D_s$ , y  $D_{ds}$  son mucho más grande que  $\xi$ . Por lo tanto, la desviación puede ser considerada instantánea (*i.e.* podemos usar la aproximación “lente delgado”).

# Geometría Lente de Schwarzschild

Lente puntual



Del triángulo OSI

$$\frac{\sin(180 - \alpha)}{D_s} = \frac{\sin(\theta - \beta)}{D_{ds}}$$

Para ángulos pequeños,

$\sin(\theta - \beta) \approx \theta - \beta$  y  
 $\sin(180 - \alpha) \approx \alpha$ , entonces

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s} \vec{\alpha}$$

Como  $\alpha = \frac{4GM}{\xi c^2}$ ,

y por simple geometría  $\theta = \frac{\xi}{D_d}$

$$\beta = \theta - \left( \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \right) \cdot \frac{1}{\theta}$$

Existe una relación entre  $\beta$  y  $\theta$ . Pero para un valor dado de  $\beta$ , hay más de un valor de  $\theta$ . Esto es un teorema general de lentes.

*Para lentes no-transparentes (como el que hemos visto) hay siempre un número par de imágenes, mientras que para un lente transparente, hay un número impar de imágenes.*

Definamos un ángulo de desvío característico,  $\alpha_0$ , como una cantidad que sólo depende de la masa del lente y las distancias correspondientes,

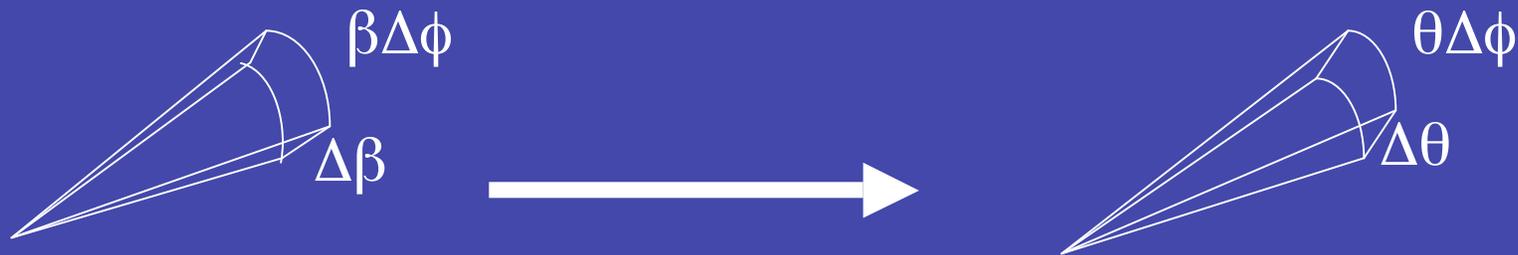
$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}}$$

tal que

$$\beta = \theta - \frac{\alpha_0^2}{\theta} \quad \text{sol.} \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{2} \left( \beta \pm \sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2} \right)$$

lo que define la posición del lente gravitacional en función de la posición verdadera de la fuente con respecto al lente,  $\beta$ , y  $\alpha_0$ .

# Magnificación para un lente de Schwarzschild



La relación  $\theta = \frac{1}{2} \left( \beta \pm \sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2} \right)$  implica que al menos una imagen será magnificada.

Para ver esto, consideremos un sistema de coordenadas polar con el lente en el centro. Consideremos que la luz pasa por un área diferencial,  $dA$ . En el lente, este elemento de área es  $dA = \beta \Delta\phi \Delta\beta$ . Sin embargo, por efecto del lente gravitacional, los ángulos se distorsionan, de forma que el observador ve la luz en un área menor  $dA' = \theta \Delta\phi \Delta\theta$ . Por lo tanto, el lente ha enfocado la luz del área  $dA$  al área  $dA'$ .

La magnificación será la razón entre ambas áreas

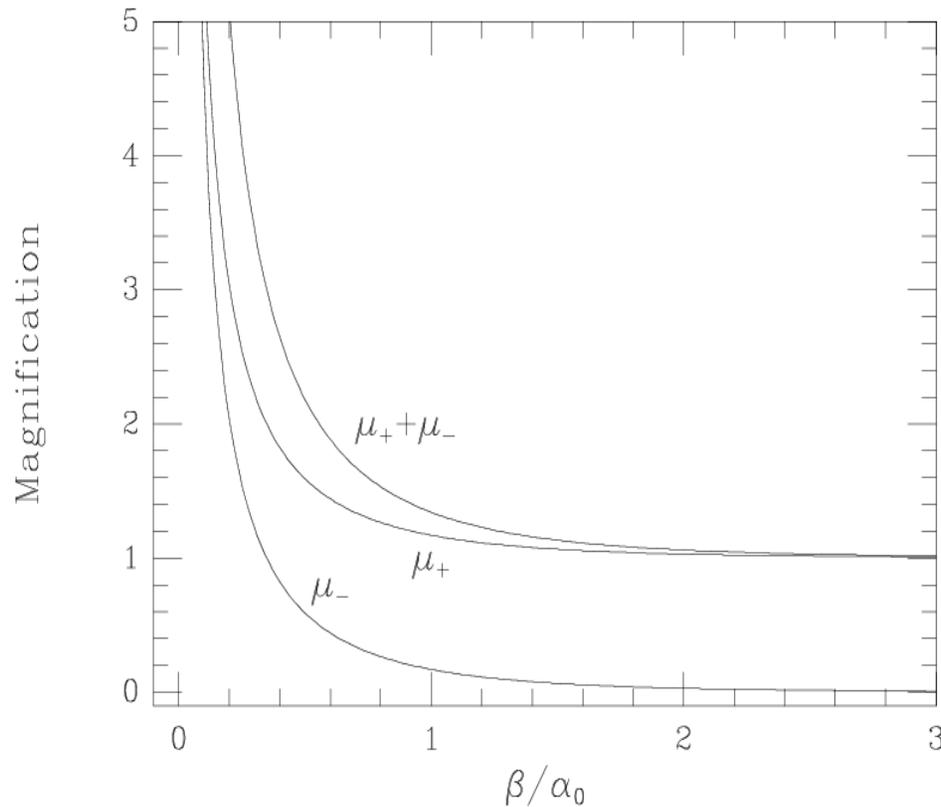
$$\mu = \left| \frac{\theta \Delta \phi \Delta \theta}{\beta \Delta \phi \Delta \beta} \right| = \left| \frac{\theta \Delta \theta}{\beta \Delta \beta} \right| = \left| \frac{\theta}{\beta} \frac{d\theta}{d\beta} \right|$$

Calculemos el último término

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2}} \right)$$

lo que la magnificación es

$$\mu = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2}} + \frac{\sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2}}{\beta} \pm 2 \right\}$$



- Cuando  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\mu_+ \rightarrow 1$  y  $\mu_- \rightarrow 0$ ; no hay efecto lente
- Cuando  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\mu_+ \rightarrow \infty$  y  $\mu_- \rightarrow \infty$
- Cuando  $\beta < \alpha_0$ , el efecto lente (magnificación) es importante.

Hay otras relaciones importantes. Ya que la magnificación está dada por

$$\mu = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2}} + \frac{\sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2}}{\beta} \pm 2 \right\}$$

la razón entre los brillos de dos imágenes es

$$\nu = \frac{\mu_+}{\mu_-} = \left\{ \frac{\sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2} + \beta}{\sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2} - \beta} \right\}^2$$

lo que implica

$$\nu = \frac{\mu_+}{\mu_-} = \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^2$$

Otras relaciones convenientes son

$$\theta_1 - \theta_2 = \sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2}$$

$$\beta = \theta_1 + \theta_2 \quad \theta_1 \theta_2 = -\alpha_0^2$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}}$$

$$M = -\frac{\theta_1 \theta_2 c^2}{4G} \cdot \frac{D_d D_s}{D_{ds}}$$

necesitamos redshifts

(Recordar que los ángulos son cantidades vectoriales, de tal forma que ángulos como  $\theta$  pueden ser positivos o negativos.)

# Escalas típicas para lentes

$$\text{El valor clave es } \alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}}$$

## Microlentes

Para proyectos tipo MACHO, que tratan de detectar estrellas en la LMC ( $D_s = 50kpc$ ) que han sido lenceadas por estrellas en la Vía Láctea

$$\alpha_0 = 4 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{M}{M_{sol}}} \sqrt{\frac{D_{ds}}{D_d}} \quad [\text{arcsec}]$$

Ángulos sub-miliarcsec, no podríamos resolver las estrellas, pero como las imágenes están sobrepuesta, vemos su magnificación

## Cuasares

Cuasares lenceados por una galaxia elíptica ( $10^{12} M_{sol}$ ) en un universo Einstein-de Sitter

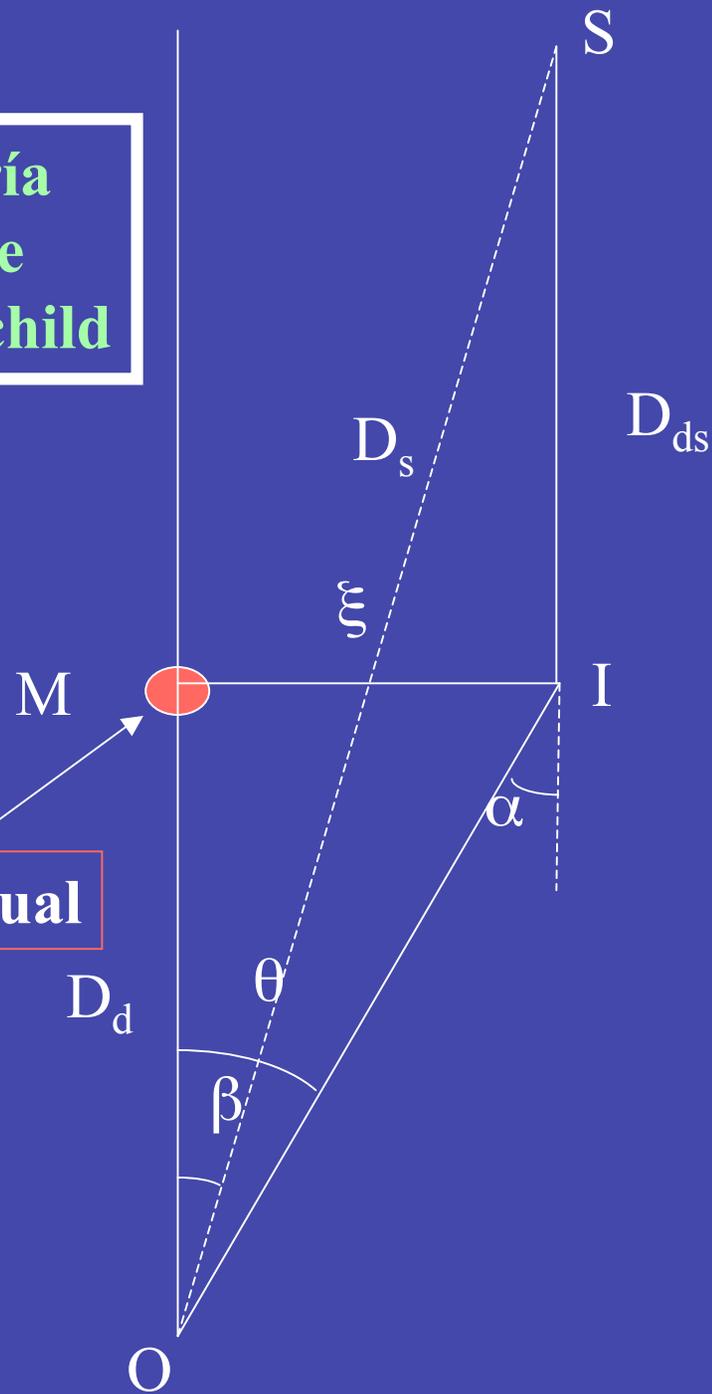
$$\alpha_0 = 1.6 \sqrt{\frac{M}{10^{12} M_{sol}}} \sqrt{\frac{z_s - z_d}{z_s z_d}} \sqrt{h} \quad [\text{arcsec}]$$

$$\text{donde } h = \frac{H_0}{100} \quad [km / s / Mpc]$$

Escala típica es del orden de los arcsec; dos imágenes pueden resolverse

**Geometría  
Lente de  
Schwarzschild**

**Lente puntual**



# Radio de Einstein

Para un lente puntual de masa  $M$ , el ángulo de desviación es

$$\beta = \theta - \frac{\alpha_0^2}{\theta}$$

con

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \Rightarrow \beta = \theta - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{1}{\theta}$$

en el caso cuando la fuente está justo detras del lente

$$\theta_E = \alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}}$$

Para una galaxia masiva con una masa  $M = 10^{12} M_{sol}$   
al redshift  $z_d = 0.5$  y una fuente a  $z_s = 2.0$ , en un universo

Einstein de-Sitter, este radio es

$$\theta_E \approx 1.8 \sqrt{\frac{M}{10^{12} M_{sol}}} \sqrt{h} \quad [\text{arcsec}]$$

# Densidad Superficial Crítica

En el caso mas general, una distribución en tres dimensiones y un lente extendido, la densidad  $\rho(\mathbf{r})$  puede proyectarse a lo largo de la línea de visión para obtener la densidad superficial de masa,  $\Sigma(\xi)$

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int_0^{D_s} \rho(\vec{r}) dz$$

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int_0^{D_s} \rho(\vec{r}) dz$$

donde  $\vec{r}$  es un vector en tres dimensiones en el espacio,  
y  $\vec{\xi}$  es un vector en dos dimensiones en el plano del lente.

Recordemos que el ángulo de desviación para lente puntual es

$$\alpha = \frac{4GM}{\xi c^2}$$

en este caso  $\vec{\alpha}$  es el ángulo en de desviación en dos  
dimensiones y está dado por la suma de todos los elementos  
de masa del lente:

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi'$$

Lo que para un círculo finito con densidad de masa constante  
el ángulo de desviación es:

$$\alpha(\xi) = \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{4G}{c^2} \frac{\Sigma \pi \xi^2}{\xi}$$

con  $\xi = D_d \theta$  la expresión queda

$$\alpha(\theta) = \frac{D_{ds} D_d}{D_s} \frac{4\pi G \Sigma}{c^2} \theta$$

Definamos **DENSIDAD DE MASA SUPERFICIAL CRITICA,  $\Sigma_{crit}$**

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}}$$

obtenemos el ángulo de desviación

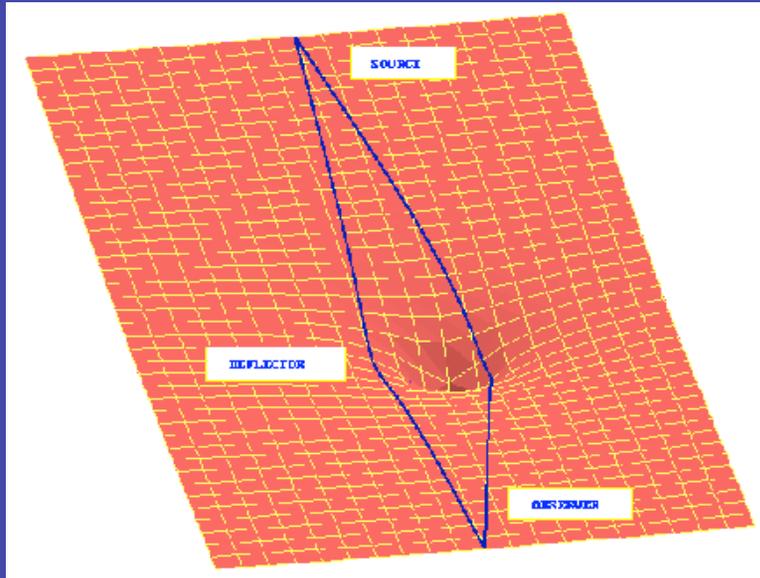
$$\tilde{\alpha}(\theta) = \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} \theta$$

Lo que representa a la masa M distribuida sobre el área encerrada

por el anillo de Einstein:  $\Sigma_{crit} = \frac{M}{\pi R_E^2}$ , donde  $R_E = \theta_E D_d$ .

$$\text{Si } z_d=0.5 \text{ y } z_s=2.0 \Rightarrow \Sigma_{crit} \approx 0.8 \text{ gr cm}^{-2}$$

**Para una distribución de masa arbitraria, la condición  $\Sigma > \Sigma_{crit}$  en cualquier punto es suficiente para producir imágenes múltiples.**



# Retardo temporal en lentes

Si la fuente es variable, entonces la imagen que vemos también varía. Sin embargo, esta variación no necesariamente es al mismo tiempo: en general, habrá un retardo de tiempo entre los dos eventos. Esto se debe a dos cosas:

1. Retardo por razones geométricas
2. Retardo debido al paso de fotones por un potencial gravitacional.

**EFFECTOS GEOMÉTRICOS:** Consideremos el valor de  $D_{ds} + D_d - D_s$  para cada imagen del lente. Del triángulo OSI,

$$D_s^2 = D_d^2 + D_{ds}^2 - 2D_d D_{ds} \cos(180 - \alpha)$$

sustituyendo

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha = -\{1 - 2\sin^2(\alpha/2)\}$$

entonces

$$D_s^2 = D_d^2 + D_{ds}^2 + 2D_d D_{ds} - 4D_d D_{ds} \sin^2(\alpha/2)$$

0

$$\begin{aligned} 4D_d D_{ds} \sin^2(\alpha/2) &= (D_d^2 + D_{ds}^2) - D_s^2 \\ &= (D_d + D_{ds} - D_s)(D_d + D_{ds} + D_s) \end{aligned}$$

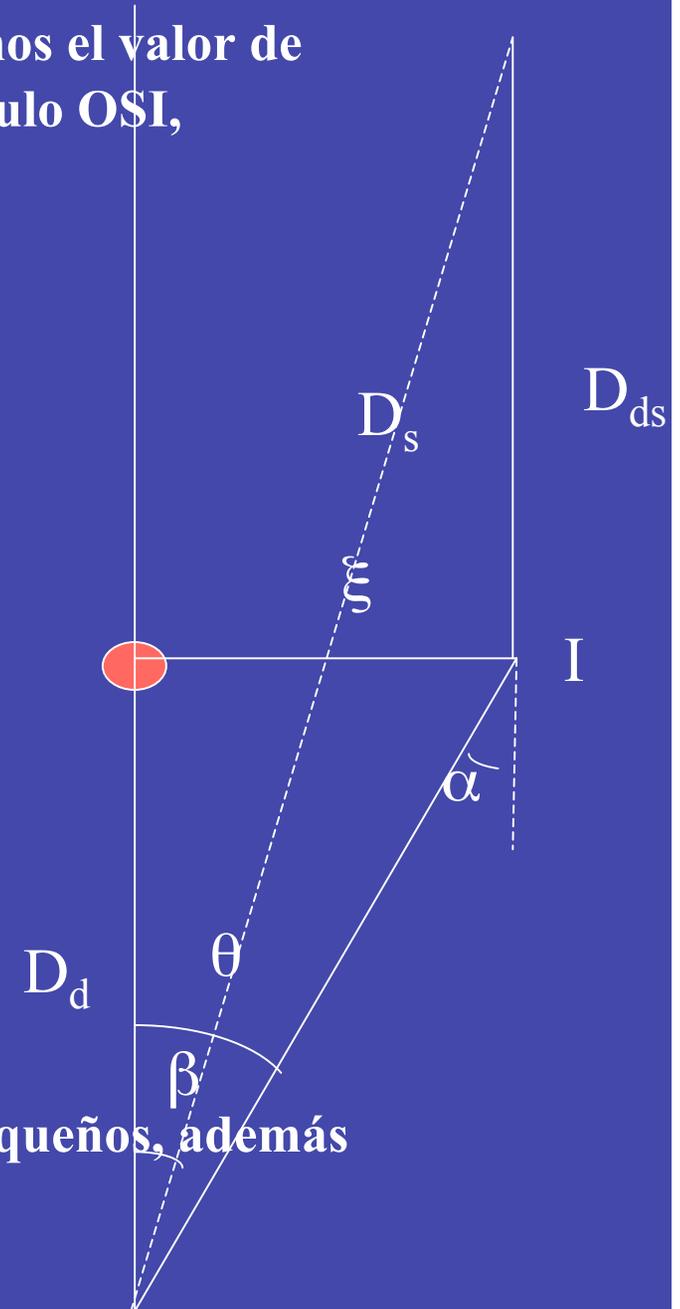
Usando la ley de senos

$$\frac{\sin \alpha}{D_s} = \frac{\sin(\theta - \beta)}{D_{ds}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{D_s}{D_{ds}} (\bar{\theta} - \bar{\beta})$$

Y considerando la aproximación de ángulos pequeños, además de

$$D_{ds} + D_d + D_s \approx 2 D_s$$



entonces

$$\begin{aligned} D_d + D_{ds} - D_s &= \frac{4D_d D_{ds} \sin^2(\alpha/2)}{D_d + D_{ds} + D_s} \\ &= \frac{D_d D_{ds} \alpha^2}{2D_s} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $\alpha$ , tenemos

$$D_d + D_{ds} - D_s = \frac{D_d D_s}{2D_{ds}} (\bar{\theta} - \bar{\beta})^2 = c \Delta t$$

Como hay dos  $\theta$ , hay dos retardos distintos. El retardo de una imagen respecto a la otra es

$$\Delta T_g = \frac{D_d D_s}{2c D_{ds}} \left\{ (\theta_1 - \beta)^2 - (\theta_2 - \beta)^2 \right\}$$

Recordando que

$$\alpha_0 = \left( \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \right)^{1/2}$$

Y que

$$\beta = \theta - \frac{\alpha_0^2}{\theta}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta T_g &= \frac{1}{2c} \frac{4GM}{c^2 \alpha_0^2} \left\{ \frac{\alpha_0^4}{\theta_1^2} - \frac{\alpha_0^4}{\theta_2^2} \right\} \\ &= \frac{2GM}{c^3} \alpha_0^2 \left\{ \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{\theta_1^2 \theta_2^2} \right\} \end{aligned}$$

recordemos  $\theta_1 \theta_2 = -\alpha_0^2$   
obtenemos una expresión para  
el retardo geométrico de una  
imagen respecto a la otra

$$\Delta T_g = \frac{2GM}{c^3} \left\{ \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{|\theta_1 \theta_2|} \right\}$$

La segunda fuente de retardo se debe al paso de los fotones por un potencial. Cuando la luz pasa por un potencial gravitacional experimenta los que se llama *Retardo temporal de Shapiro*.

$$\Delta T = -\frac{2}{c^3} \int \phi dl$$

donde  $dl$  es el camino del fotón por el pozo de potencial. En caso de un potencial débil y desviaciones pequeñas, el retardo que experimenta un fotón en su camino desde la fuente S al punto I es,

$$\Delta T = -\frac{2}{c^3} \int_0^{D_{ds}} \frac{GM}{r} dl = -\frac{2GM}{c^3} \int_0^{D_{ds}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \xi^2}} dx$$

$$\Delta T_1 = \frac{2GM}{c^3} \ln \left( \frac{\xi}{2D_{ds}} \right)$$

De la misma forma, el retardo del fotón cuando va de el punto I al observador

$$\Delta T_2 = \frac{2GM}{c^3} \ln \left( \frac{\xi}{2D_d} \right)$$

tal que, el retardo total es,

$$\Delta T_p = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{2GM}{c^3} \left\{ \ln \left( \frac{\xi}{2D_{ds}} \right) + \ln \left( \frac{\xi}{2D_d} \right) \right\}$$

Ahora calculemos la diferencia en retardo entre imágenes. A distancias muy grandes del lente, el retardo es despreciable. De manera que si tomamos una distancia  $D' \gg \xi$ , pero  $D' \ll D_{ds}, D_s$ , podemos escribir,

$$\Delta T_p = \frac{2GM}{c^3} \left\{ \ln \left( \frac{\xi}{2D'} \right) + \ln \left( \frac{D'}{D_{ds}} \right) + \ln \left( \frac{\xi}{2D'} \right) + \ln \left( \frac{D'}{D_d} \right) \right\}$$

Los términos segundo y cuarto no dependen de  $\xi$  y son iguales para ambas imágenes.

Cuando tomamos la diferencia de los dos retardos tenemos,

$$\Delta T_p = \frac{2GM}{c^3} \left\{ \ln \left( \frac{\xi_1}{2D'} \right) + \ln \left( \frac{\xi_2}{2D'} \right) \right\}$$

Si  $\theta = \xi / D_d$  y notamos que  $D'$  es el mismo en ambos rayos, obtenemos el Retardo Shapiro,

$$\Delta T_p = \frac{2GM}{c^3} \ln \left( \left| \frac{\theta_1}{\theta_2} \right| \right)$$

El retardo total de una imagen con respecto a la otra es

$$\Delta T = \Delta T_g + \Delta T_p = \frac{4GM}{c^3} \left\{ \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{2|\theta_1\theta_2|} + \ln \left( \left| \frac{\theta_1}{\theta_2} \right| \right) \right\}$$

**Notar que esta ecuación desprecia dos efectos importantes:**

- 1. El universo se expande y no-Euclideo. Lo que implica que las distancias dependen de  $H_0$ ,  $q_0$  y  $z$ .**
- 2. Los lentes cosmológicos no son fuentes puntuales. Los mejores lentes son galaxias elípticas, pero estas galaxias están localizadas en el interior de cúmulos. Lentes reales deben incluir efectos de la galaxia y el cúmulo.**

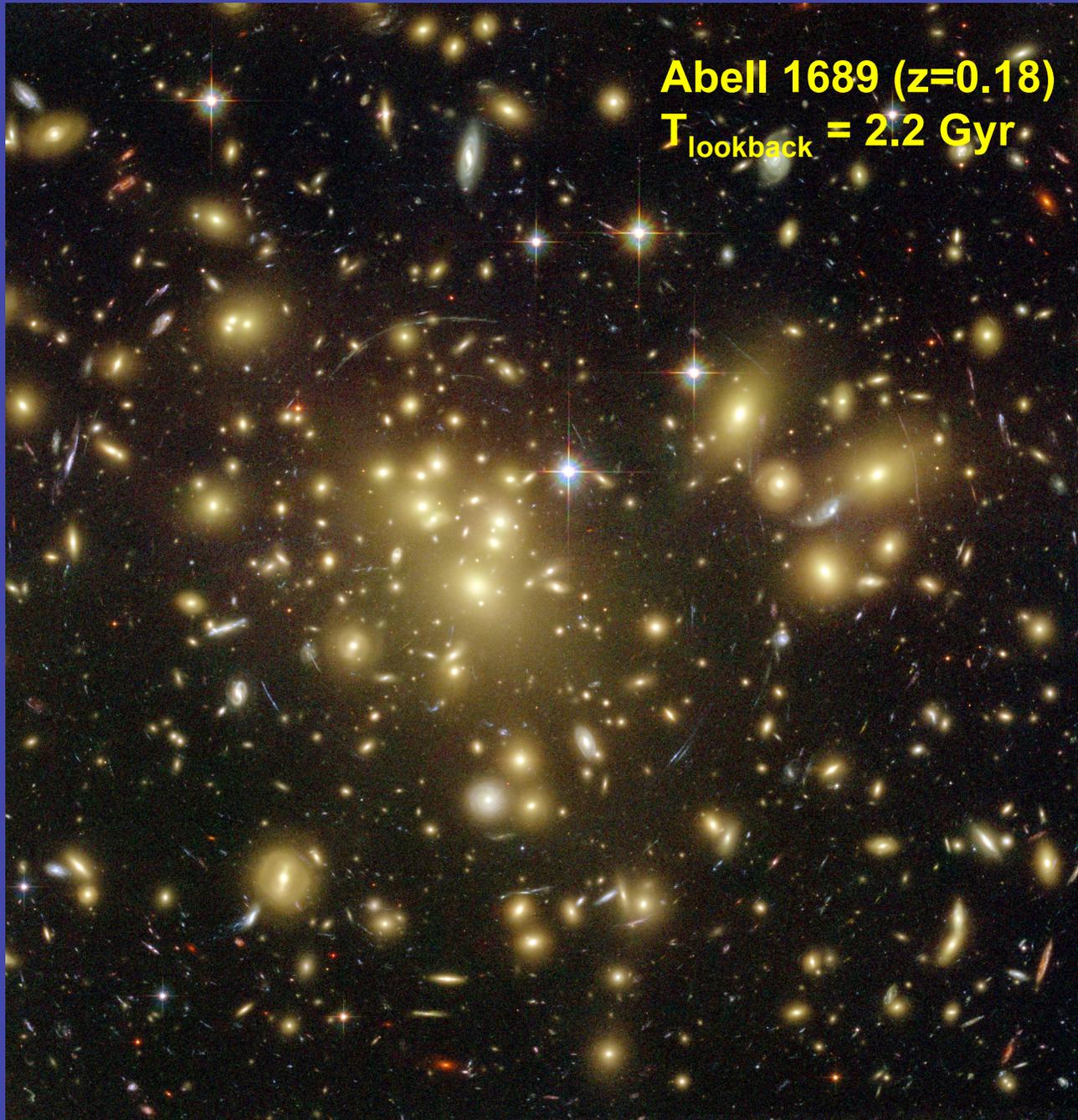
# Abell 1689, A Strongly Lensing Cluster of Galaxies ( $z = 0.18$ )

Grupo GTO ACS

## Major Goals:

- Use strong and weak lensing to determine the nature and distribution of the dark matter in Abell 1689
  - Measure the Universe's geometry by using the redshifts of multiply-imaged arcs
  - Determine the high- $z$  galaxy luminosity function at moderate luminosities: complement other ACS wide field studies
- 
- **We have extensive ground based coverage: UBVRIZJHK imaging; Keck, VLT spectroscopy; WFPC2 + NICMOS**
  - **23 ACS orbits in one pointing 4 g, 4 r, 5 i, 7z, 3 grism**

**Abell 1689 (z=0.18)**  
 **$T_{\text{lookback}} = 2.2 \text{ Gyr}$**





# The Mass Within the Einstein Radius

23 Orbits

g, r, i, z

$z_{sp} = 4.86$

12.3 Gyr  
Lookback

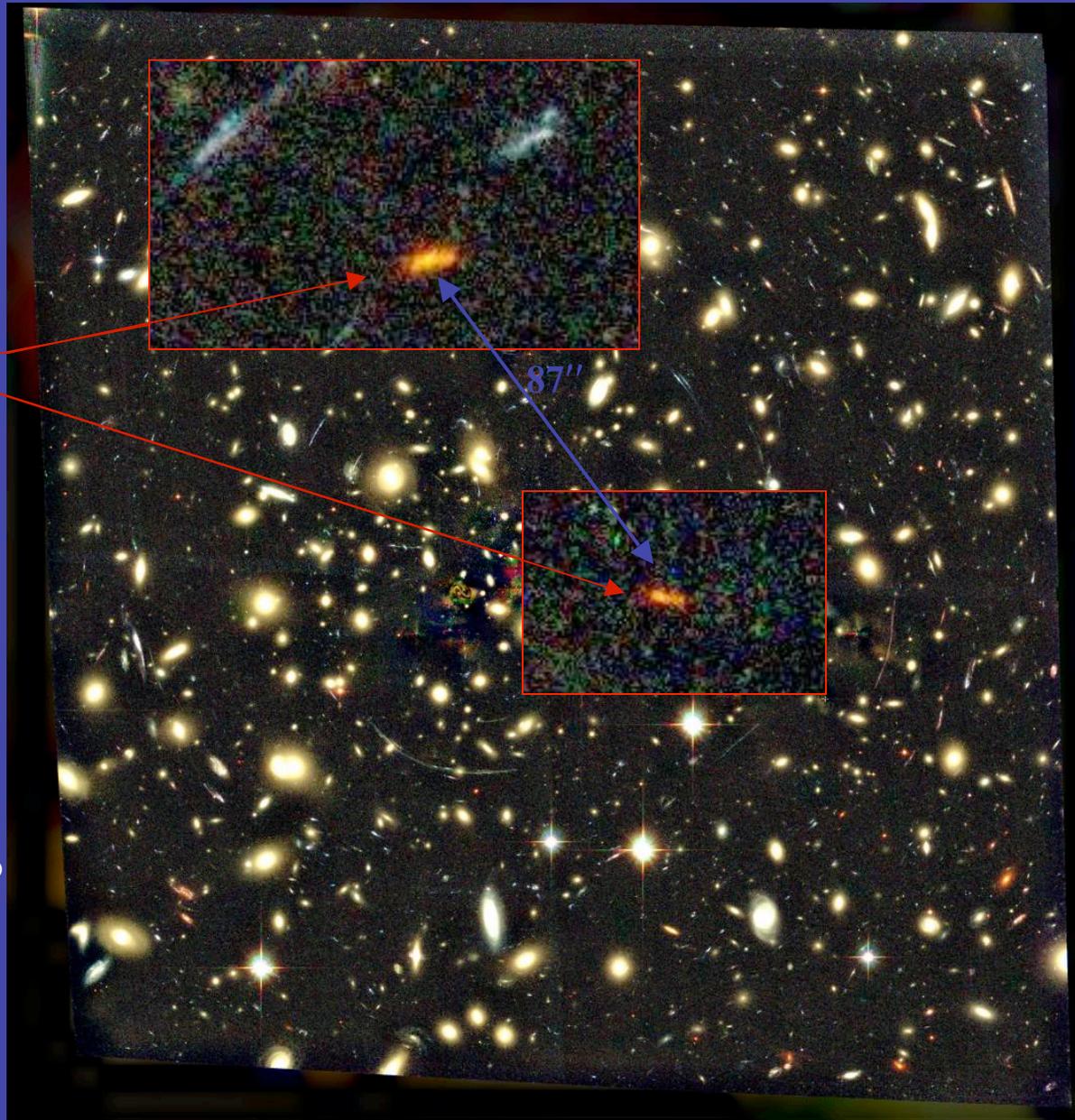
$\theta = 87''$

$\theta_{\text{Einstein}} = 43.5''$

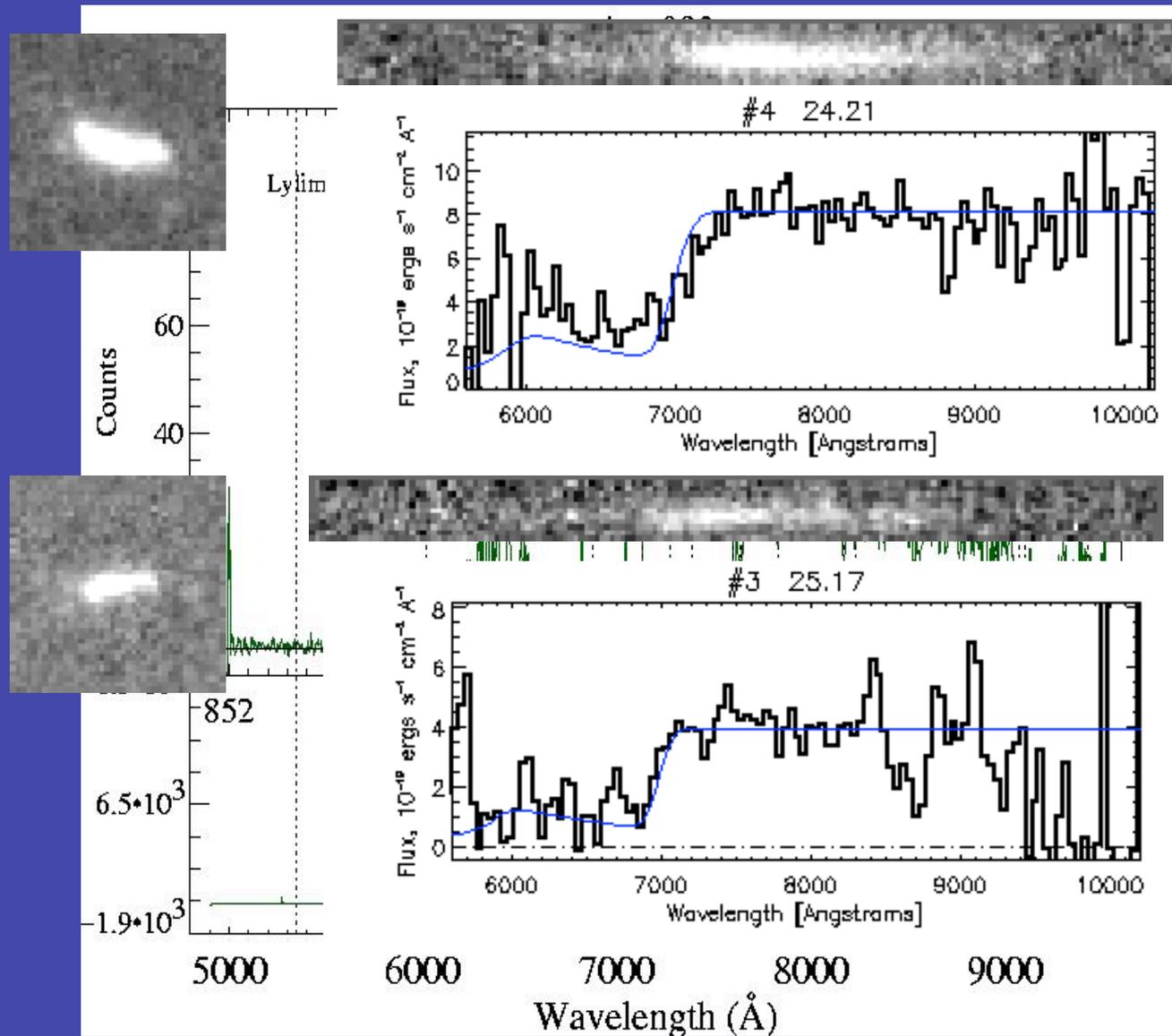
$M(\theta < \theta_E) =$

$$\theta^2 D_d / (8\pi G)$$

$M_E = 1.56 \times 10^{14} M_{\odot}$



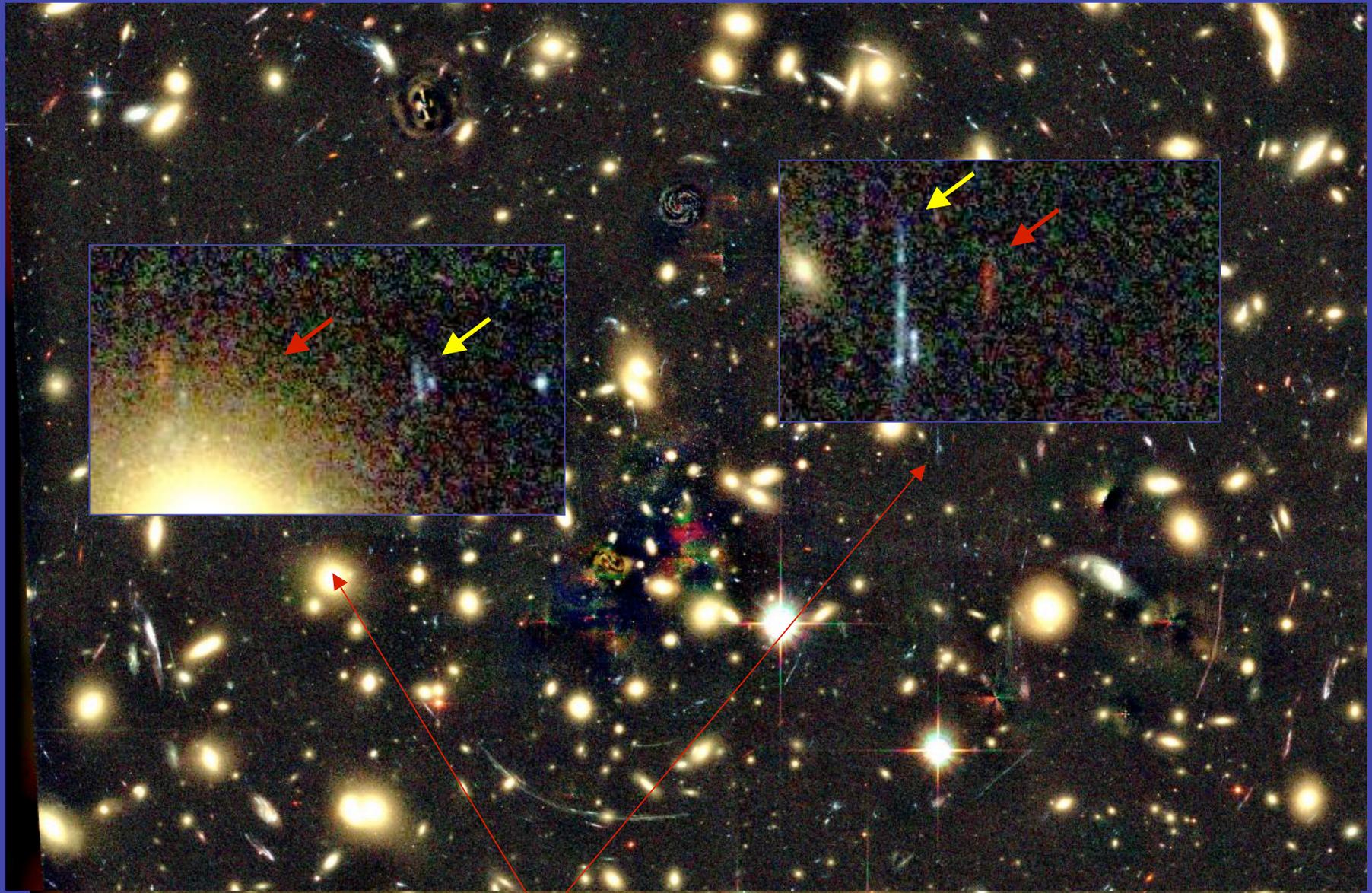
# Keck and ACS Grism Spectra of the $z = 4.86$ Lensed Galaxy



# The ACS Grism: Spectral and Spatial Resolution

Avg. Wavelength (nm)	Avg. Cross Dispersion FWHM (pixels)	Avg. Resolution (nm)	Resolving Power, $\lambda/\Delta\lambda$
$593.8 \pm 8.2$	$2.30 \pm 0.2$	9.07	65
$801.6 \pm 6.9$	$2.33 \pm 0.3$	9.21	87
$977.6 \pm 13.3$	$3.16 \pm 0.7$	12.49	78

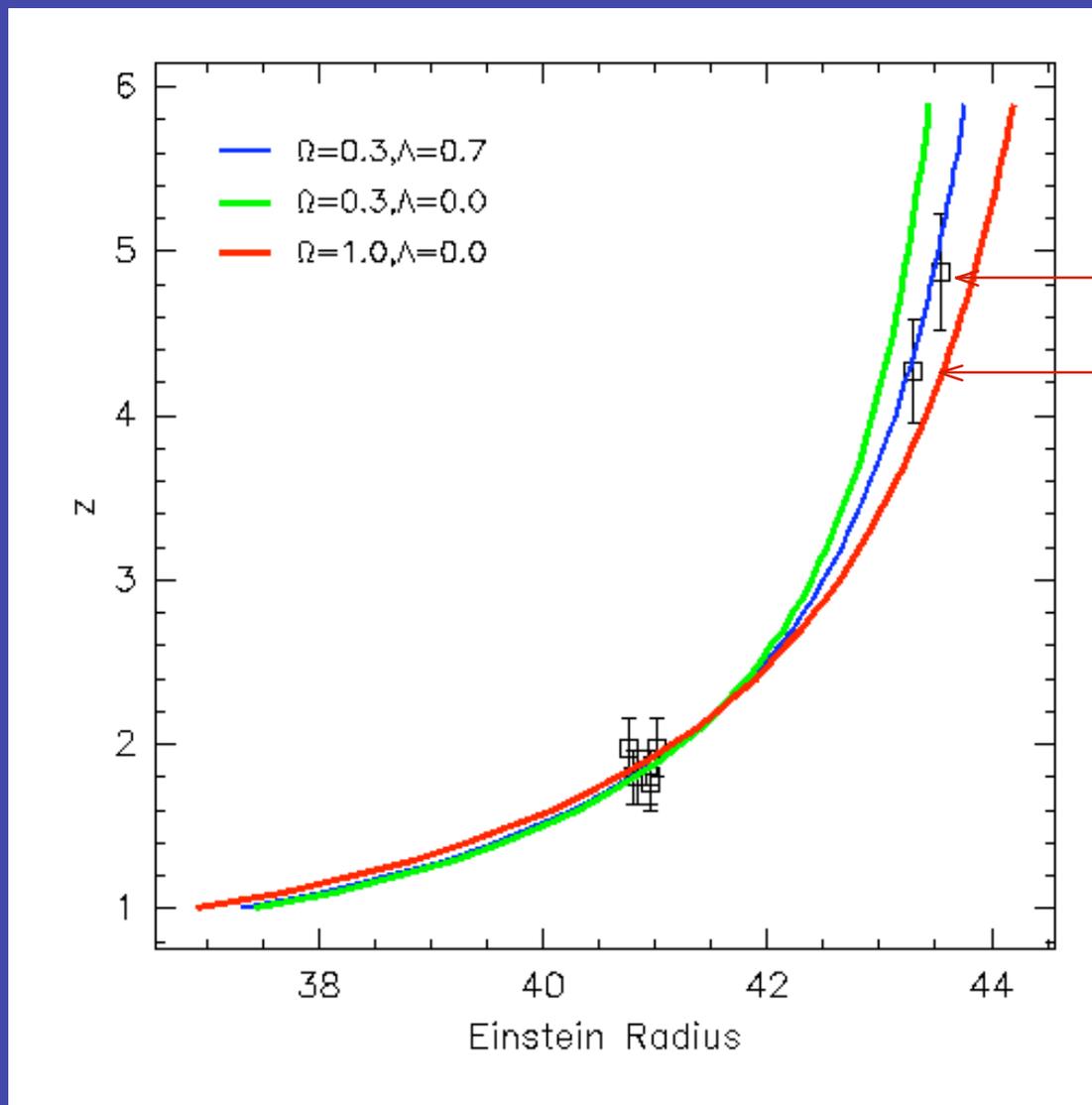
# The Einstein Radius is a Function of Geometry, and Thus Redshift



**“Paired Galaxies” with Very Different Redshifts – 1.5-2 and ~5**

# Measuring the geometry of the Universe with Gravitational Lensing

For isothermal sphere:  $\theta_E = 4\pi(\sigma/c)^2 D_{ds}/D_s$



Spectroscopic-z

Photo-z



## Gravitational lensing and Einstein's General Relativity Theory

