Universo de Einstein

La energía en el campo de gravedad de Newton es,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \frac{2E}{R^2}$$

Para el caso relativista, la ecuación es,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Aquí, k es la constante que determina la curvatura del Universo. Notar que k sólo aparece en el término dividido por R, que no es un observable. Por lo tanto elegimos las unidades de R tal que $k = 1,0,-1$

La otra variable nueva es Λ,
la Constante Cosmológica.
Es como un término de presión
que provee una nueva
fuerza repulsiva (ó atractiva)
que es directamente proporsional
a la distancia.

$$\ddot{R} = \Lambda R$$

- ***k=1 ⇒ curvatura positiva***
- ***k=0 ⇒ universo plano***
- ***k=-1 ⇒ curvatura negativa***

En el Universo relativista la distancia entre dos puntos co-móviles no es simplemente

$$ds^2 = du^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Donde la distancia total se obtiene integrando a lo largo del camino.
En el espacio-tiempo, el intervalo entre dos puntos es,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - du^2$$

Ahora, el camino debe ser integrado en ambos, espacio y tiempo.

En un espacio en expansión la distancia espacial entre dos puntos es *Rdu*, donde *R* es la escala del tamaño del Universo en el momento de la medida. De tal forma que La distancia entre dos puntos es,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2$$

Esto es la métrica de Robertson-Walker
Notar que para la luz *ds=0*

El Universo puede no ser plano. En tal caso debemos modificar la métrica,

En coordenadas Cartesianas

$$du^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En coordenadas Cartesianas Esféricas

$$du^2 = d\xi^2 + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

pero esto supone espacio plano.

Si el espacio es curvo, entonces

$$du^2 = \frac{d\xi^2}{1 - k\xi^2} + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

- ***k=1 ⇒ curvatura positiva, espacio elíptico, E<0, q>1/2***
- ***k=0 ⇒ universo plano, coordenadas esféricas normales***
- ***k=-1 ⇒ curvatura negativa, espacio hiperbólico, E>0, q<1/2***

Soluciones para un Universo de Friedmann con Λ=0

La primera ecuación de Einstein de Campo es,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Consideremos $\Lambda = 0$.

Si $k = 0$, el espacio es Euclideano, la ec. queda

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{\frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^3}{R}} \quad \text{y} \quad R = \sqrt[3]{6\pi G\rho_0 R_0^3 t^2}$$

Si $k \neq 0$, la solución de,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = -\frac{kc^2}{R^2}$$

hay que escribirla paramétricamente,

$k = 1$ (cerrado) $\qquad$ $k = -1$ (abierto)

$$R(\theta) = a(1-\cos\theta) \qquad R(\theta) = a(\cosh\theta - 1)$$

$$t(\theta) = \frac{a}{c}(\theta - \sin\theta) \qquad t(\theta) = \frac{a}{c}(\sinh\theta - \theta)$$

donde $\quad a = \frac{4\pi G\rho_0}{3c^2} R_0^3$

TAREA

Para un Universo cerrado, demostrar que el parámetro de Hubble es,

$$H = \frac{c}{a}\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}$$

$\underline{k = 1 \text{ (bound)}}$

$$R = a(1 - \cos\theta)$$

$$dR = a \sin\theta \, d\theta$$

$$t = \frac{a}{c}(\theta - \sin\theta)$$

$$dt = \frac{a}{c}(1 - \cos\theta) \, d\theta$$

$$H = \frac{c}{a} \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2}$$

$$q = \frac{1 - \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1 - q}{q}$$

$$(1 + z) = \frac{1 - \cos\theta_0}{1 - \cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{z + \cos\theta_0}{(1 + z)}$$

$\underline{k - 1 \text{ (unbound)}}$

$$R = a(\cosh\theta - 1)$$

$$dR = a \sinh\theta \, d\theta$$

$$t = \frac{a}{c}(\sinh\theta - \theta)$$

$$dt = \frac{a}{c}(\cosh\theta - 1) \, d\theta$$

$$H = \frac{c}{a} \frac{\sinh\theta}{(\cosh\theta - 1)^2}$$

$$q = \frac{\cosh\theta - 1}{\sinh^2\theta}$$

$$\cosh\theta = \frac{1 - q}{q}$$

$$(1 + z) = \frac{\cosh\theta_0 - 1}{\cosh\theta - 1}$$

$$\cosh\theta = \frac{z + \cosh\theta_0}{(1 + z)}$$

Distancia propia cosmológica

Hay varias formas de medir distancias en astronomía:

- ***Distancia Luminosa:*** **Comparando flujo observado con emitido y usando la ley $1/r^2$**
- ***Distancia angular:*** **Se mide el tamaño angular del objeto y se compara con el tamaño físico real.**
- ***Distancia movimiento propio:*** **Si conocemos la velocidad del objeto, podemos medir su distancia observado su movimiento en el cielo.**
- ***Distancia paralajes:*** **Midiendo el paralaje de un objeto, por trigonometría obtenemos su distancia**

En cosmología, cada una de las distancias anteriores tiene una dependencia diferente con H_0, q_0, y z.

Calculemos la distancia propia que un haz de luz cubre en su camino de un objeto en coord co-móviles *u* en *a un* objeto en *u* Partamos de Robertson-Wall

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2$$

$$= c^2 dt^2 - R^2 \left\{ \frac{d\xi^2}{1-k\xi^2} + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right\}$$

Para el viaje de la luz, $ds = 0$, y, ya que la luz viaja radialmente, $d\theta = d\phi = 0$. Entonces R-W métrica es,

$$c^2 dt^2 = R^2 \left\{ \frac{d\xi^2}{1-k\xi^2} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{R}} dt = \frac{d\xi}{\sqrt{1-k\xi^2}}$$

La distancia propia entre (u, t_1) y $(0, t_0)$ es dada por,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{R}} dt = \int_u^0 \frac{d\xi}{\sqrt{1-k\xi^2}}$$

Notar límites

Si $k = 0$, y si usamos $R = at^{2/3} \Rightarrow \frac{3c}{a} t_0^{1/3} - \frac{3c}{a} t_1^{1/3} = u$

Recordemos la definición de redshift

$$(1+z) = \frac{R_0}{R_1} = \frac{at_0^{2/3}}{at_1^{2/3}} = \left(\frac{t_0}{t_1} \right)^{2/3}$$

Con esto la solución toma la forma,

$$u = \frac{3c}{a} t_0^{1/3} \left\{ 1 - \sqrt{1+z} \right\}$$

Si notamos que $\dot{R} = \frac{2}{3} a t^{-1/3}$

$$u = \frac{2c}{\dot{R}_0} \left\{ 1 - \sqrt{1+z} \right\}$$

usando la definición $H_0 = \dfrac{\dot{R}_0}{R_0}$,

$$d_p = R_0 u = \frac{2c}{H_0} \left\{ 1 - \sqrt{1+z} \right\}$$

Para el caso general, con $\Lambda = 0$

$$d_p = \frac{c}{H_0 q_0^2 (1+z)} \left\{ q_0 z + (q_0 - 1) \left[\sqrt{2 q_0 z + 1} - 1 \right] \right\}$$

Distancia Luminosa

La mayoría de las distancias en cosmología se basan en la ley $1/r^2$. Sin embargo, hay otras consideraciones que hacer para objetos a distancias cosmológicas.

El flujo de *n* fotones por unidad de tiempo, emitido por una fuente a redshift *z*, *es:*

$$F = \frac{n \cdot h\upsilon_e}{dt_e} = \frac{fotones \cdot energía}{tiempo}$$

Por otro lado, el flujo observado es,

$$f = \frac{n \cdot h\upsilon_o}{dt_o} \cdot \frac{1}{d^2}$$

El valor d_p es la distancia que recorre el fotón, es decir, la distancia propia. Recordemos,

$$\upsilon_0 = \upsilon_e / (1 + z)$$

Notemos que $dt_0 \neq dt_e$: ya que la fuente se mueve, hay dilación de tiempo, i.e. medimos los relojes de la fuente más lentos, i.e.

$$t_0 = \frac{t_e}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Ademas, el intervalo entre pulsos se medirán más largos, ya que la distancia entre nosotros y la fuente aumenta. (Un segundo pulso tendra una mayor distancia que recorrer.) Este tiempo extra es,

$$\Delta \mathrm{t}_0 = \frac{t_e(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Entonces,

$$t_0 + \Delta t_0 = t_e \frac{1 + (v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = t_e \frac{\sqrt{1 + (v/c)}}{\sqrt{1 - (v/c)}} = t_e(1+z)$$

o

$$dt_0 = (1+z)dt_e$$

Por lo tanto, tenemos que,

$$f = \frac{nh\upsilon_0}{dt_0}\frac{1}{d^2} = \frac{nh\upsilon_e}{dt_e}\frac{1}{(1+z)^2}\frac{1}{d^2} = \frac{F}{(1+z)^2}\frac{1}{d_p^2}$$

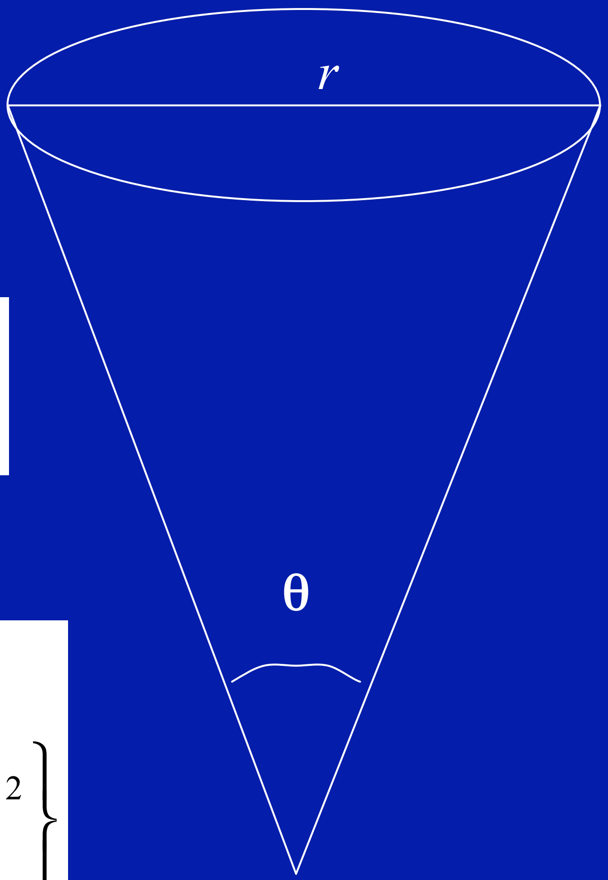
La distancia luminosa se relaciona con la distancia propia por

$$d_L = d_p(1+z)$$

Distancia a partir del Diámetro Angular

Consideremos una galaxia con un tamaño angular *r* a redshift *z*. En geometría euclidiana normal *distancia ∝ 1/θ*. Sin embargo, en un universo relativista en expansión esto es distinto.

$$\theta = \frac{r}{d_A}$$



Partamos de la métrica R-W.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2$$
$$= c^2 dt^2 - R^2 \left\{ \frac{d\xi^2}{1 - k\xi^2} + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}$$

Si la galaxia está en el plano del cielo, la distancia radial en ambos lados es la misma. Por lo tanto, *$d\xi=0$*. De la misma forma, ya que ambos lados de la galaxia se observan al mismo tiempo, *$dt=0$*, y la separación de ambos lados es *$s=\int ds$*. Elegimos nuestro sistema de coordenadas tal que el ángulo que subtiende la galaxia es todo en *θ*, tal que *$d\phi=0$*. Entonces,

$$ds^2 = -R^2 du^2 = -R^2 \xi^2 d\theta^2$$

o, si elegimos las coordenadas de tal forma que θ es positiva,

$$\theta = \frac{s}{R\xi}$$

eliminando R y sustiyundo por R_0 de

$$(1+z) = R_0 / R$$

entonces,

$$\theta = \frac{s}{R\xi} = \frac{s(1+z)}{R_0 \xi}$$

Recordemos distancia propia,

$$R_0 \xi = R_0 u$$

$$\theta = \frac{s(1+z)}{d_p}$$

En otras palabras,

$$d_A = d_p (1+z)^{-1} = d_L (1+z)^{-2}$$

Brillo Superficial

Veamos como varía el brillo superficial de una galaxia en función del redshift. Partamos de un análisis dimensional,

$$\Sigma = \frac{f}{\theta^2}$$

donde f es el flujo observado, y θ el tamaño angular. Como f se relaciona al flujo intrínseco, F a través de d_L, y θ por d_A al tamaño real, r, entonces,

$$\Sigma = \frac{F}{d_L^2} \cdot \frac{d_A^2}{r^2} = \frac{F}{r^2}(1+z)^{-4}$$

Es decir, el brillo supercial disminuye rápidamente con redshift.

Elemento de Volumen Cosmológico

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

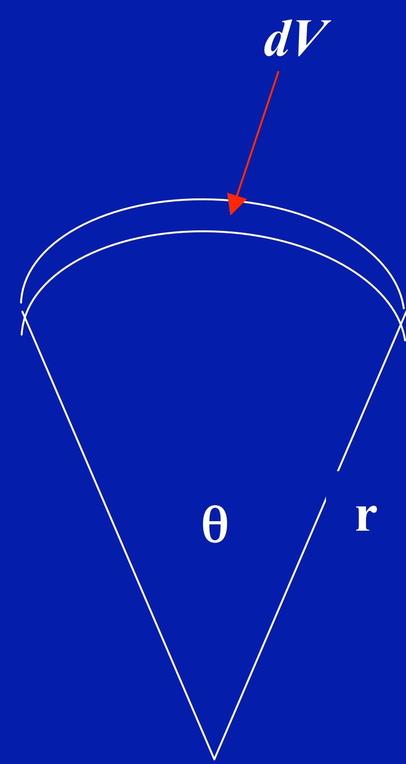
Las variables θ y ϕ son independientes de la cosmología. Ya que la cáscara de volumen es concéntrica con la Tierra, el radio vector, r, es la distancia de diámetro angular. Además, escribamos el elemento de volumen con z,

$$dV = r_A^2 \sin\theta \frac{dr}{dz} dz d\theta d\phi$$

notamos aquí que r cambia con z, hay que usar la distancia propia y no la distancia de diámetro angular. Usamos Rdu,
Para calcular el elemento de volumen, partimos de la métrica R-W,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2$$

lo que para la luz es, $cdt = Rdu$
Buscamos la relación entre Rdu y z,



$$dr = Rdu$$

$$dt = \left(\frac{dt}{dR}\right)\left(\frac{R}{R}\right)dR = \left(\frac{R}{\dot{R}}\right)\left(\frac{1}{R}\right)dR = \frac{1}{HR}dR$$

ademas,

$$\frac{\mathrm{R}_0}{\mathrm{R}} = (1+z) \quad \Rightarrow \quad dR = -\frac{R_0}{(1+z)^2}dz$$

Esto nos queda,

$$Rdu = cdt = \frac{c}{HR}dR = -\frac{c}{HR}\frac{R_0}{(1+z)^2}dz = -\frac{c}{H}\frac{1}{(1+z)}dz$$

Relacionemos H a H_0. Consideremos un universo cerrado,

$$H = \frac{c}{a}\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{H_0} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\frac{(1-\cos\theta_0)^2}{(1-\cos\theta)^2}$$

De la fórmula 2.23, $\Rightarrow \dfrac{H}{H_0} = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_0}(1+z)^2$

ademas, $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_0} = \dfrac{\sqrt{2q_0 z + 1}}{(1+z)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{H}{H_0} = \sqrt{2q_0 z + 1}(1+z)$

entonces,

$$dr = Rdu = -\frac{c}{H}\frac{1}{(1+z)}dz = -\frac{cdz}{H_0\sqrt{2q_0 z + 1}\cdot(1+z)^2}$$

$$dV = r_A^2 \frac{c}{H_0\sqrt{2q_0 z + 1}\cdot(1+z)^2}\sin\theta\, dz\, d\theta\, d\phi$$

Cosmología con Constante Cosmológica

Los modelos de universo inflacionario explican, entre otras cosas, muy elegantemente, la homogeneidad del fondo de micro-ondas. Este modelo implica un Universo plano, i.e. k=0. Sin embargo, la mayoría de las observaciones indican $\Omega<1$. Más aun, si $H_0 \approx 70$ Km./s/Mpc, $\Omega=1$ implica una edad de $t \approx 9$ Gyr. Estos dos argumentos, además de las observaciones de Super Novas Ia, sugieren la existencia de una constante cosmológica.

Si hay una constante cosmológica (energía del vacío), las ecuaciones básicas para distancia y tiempo cambian un poco. Consideremos las ecuaciones de campo de Einstein

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Para tener un Universo plano, sin constante cosmológica, la densidad crítica de materia debe ser,

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G}H^2$$

Si Λ es distinta de cero, la densidad para un Universo plano es menor,

$$\rho = \frac{3H^2 - \Lambda c^2}{8\pi G}$$

Ya que la densidad crítica es una cantidad no muy clara, lo que comúnmente se hace es definir tres nuevas variables.

$$\Omega_M = \rho_0/\rho_c = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}$$

con

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$$

Notar que Ω_M, Ω_Λ y Ω_k son a-dimensionales. Veamos el significado de cada término:

- **Ω_M es la densidad de energía de la materia**
- **Ω_Λ es la densidad de energía de la constante cosmológica**
- **Ω_k densidad falsa que describe cuan distinto es el Universo de plano.**

Universo inflacionario Ω_k =0, y $\Omega_M + \Omega_\Lambda$ =1

Volviendo a la ecuación

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Multiplicando por $1/H_0$

$$\left(\frac{R_0}{\dot{R}_0}\right)^2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3H_0}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \frac{\Lambda c^2}{3H_0}$$

O, después de dividir por $(R_0/R)^2$,

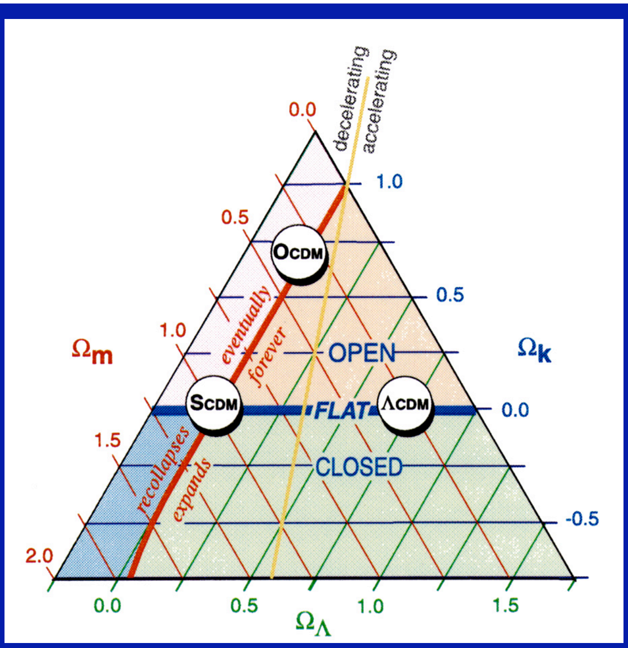
$$\left(\frac{\dot{R}}{\dot{R}_0}\right)^2 = \Omega_M\left(\frac{R_0}{R}\right) + \Omega_k + \Omega_\Lambda\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$$

Finalmente, si sustituimos por Ω_k, y hacemos $x= R/R_0$, obtenemos,

$$\left(\frac{1}{H_0}\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 + \Omega_M\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \Omega_\Lambda\left(x^2 - 1\right)$$

Esta ecuación describe al Universo en función de tres constantes , H_0, Ω_M y Ω_Λ. De esto (con un poco de álgebra), se deduce q_0.

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda$$



Lookback time con Λ.

$$\left(\frac{1}{H_0}\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1+\Omega_M\left(\frac{1}{x}-1\right)+\Omega_\Lambda\left(x^2-1\right) \text{ con } x=\frac{R}{R_0}=(1+z)^{-1}$$

$$\left(\frac{d(1+z)^{-1}}{dt}\right)^2 = H_0^2\left\{1+\Omega_M z-\Omega_\Lambda\frac{z^2+2z}{(z+1)^2}\right\}$$

$$(1+z)^{-2}\frac{dz}{dt} = H_0(1+z)^{-1}\left\{(1+z)^2(1+\Omega_M z)-\Omega_\Lambda z(2+z)\right\}^{1/2} \tag{3.30}$$

Esto da,

$$\Delta t = H_0^{-1}\int_0^z (1+z)^{-1}\left\{(1+z)^2(1+\Omega_M z)-\Omega_\Lambda z(2+z)\right\}^{-\frac{1}{2}} dz \tag{3.31}$$

Esto es una integral numérica, a no ser que $\Omega_\Lambda = 0$ o $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$

Si Ω_Λ crece el denominador decrese. Esto significa que Δt aumenta. Lo que ayuda con el problema de la edad del universo.

Aproximadamente, la edad total del universo con Λ es,

$$t_0 \approx \frac{2}{3}H_0^{-1}\frac{\sinh^{-1}\sqrt{1-\Omega_a/\Omega_a}}{\sqrt{1-\Omega_a}} \tag{3.32}$$

donde

$$\Omega_a = \Omega_M - 0.3\Omega_\Lambda + 0.3 \tag{3.33}$$

Notar que si $\Omega_a > 1$, el senh se reemplaza por sen y se dan vuelta los signos.

Notar que si $\Omega_a = 1$, la ecuación es exacta.

Distancias Cosmológicas con Λ

Consideremos la métrica de Robertson-Walker, y La luz viajando por un camino radial.

$$\frac{c}{R}dt = \frac{d\xi}{(1-k\xi^2)^{1/2}}$$

Arreglando términos y usando la ecuación anterion para dz/dt, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{R}dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{R}\frac{R_0}{R_0}\frac{dt}{dz}\frac{dz}{dt} \\
&= \int_0^z \frac{c}{R_0}\frac{R_0}{R}\frac{dt}{dz}dz \\
&= \int_0^z \frac{c}{H_0 R_0}\left\{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\right\}^{1/2} dz \\
&= |\Omega_k|^{1/2} \int_0^z \left\{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\right\}^{1/2} dz
\end{aligned}$$

La mano derecha de la ecuación queda,

$$\int_0^u = \frac{d\xi}{(1-k\xi^2)^{1/2}} = \sinh^{-1} u$$

Para $\Omega_k < 1$ (y senh$^{-1}(u)$) para $\Omega_k < 1$). Entonces,

$$\begin{aligned}
d_p &= R_0 u \\
&= R_0 \sinh\left\{|\Omega_k|^{1/2} \int_0^z \left\{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\right\}^{1/2} dz\right\}
\end{aligned}$$

Lo que da,

$$d_p = \left|\Omega_k\right|^{-\frac{1}{2}} senh\left\{\left|\Omega_k\right|^{\frac{1}{2}} \int_0^z \left\{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\right\}^{\frac{1}{2}} dz\right\}$$

(o con sen si $\Omega_k > 0$.) Notar que esta ecuación no tiene solucion analítica si $\Omega_\Lambda \neq 0$ ó $\Omega_M + \Omega_\Lambda \neq 1$.